Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: ***бакалавр***

на тему ***«Вплив параметрів на розв'язки диференціального рівняння четвертого порядку»***

Виконала: студентка групи МП41 IV курсу
(перший бакалаврський рівень),
спеціальності 113
"Прикладна математика"
освітньої програми
"Прикладна математика"
Гречка Я.О.

Керівник: доктор фіз.-мат. наук,
професор кафедри
прикладної математики
Фардигола Л.В.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук,
професор кафедри
вищої математики
та інформатики
Золотарьов В.О.

Харків — 2024 рік

Анотації

Гречка Я.О. Вплив параметрів на розв'язки диференціального рівняння четвертого порядку. У цій роботі досліджується вплив параметрів на розв'язки диференціального рівняння четвертого порядку. Отримано аналоги функцій sin і cos для диференціального рівняння четвертого порядку з подальшим детальним розглядом їх властивостей. Крім того, досліджується крайова задача з параметрами, яка згодом зводиться до системи інтегральних рівнянь. Шляхом аналізу цієї системи інтегральних рівнянь для неї отримано необхідні умови розв'язності. Для ілюстрації теоретичних результатів наведено декілька прикладів.

Hrechka Ya.O. The influence of parameters on the solutions to a fourth-order differential equation. In the paper, the influence of parameters on the solutions to a fourth-order differential equation is studied. Analogues of the functions sin and cos for the fourth-order differential equation were obtained, followed by a detailed investigation of their properties. Furthermore, a boundary-value problem with parameters is studied, which is subsequently reduced into a system of integral equations. By analysing this system of integral equations, necessary conditions for its solvability are obtained. To illustrate the theoretical results, several examples are provided.

Зміст

Вступ

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння II порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' = (i\lambda)^2 y, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{0.1}$$

Тут і далі $\lambda \in \mathbb{C}$.

Загально відомо, що розв'язком цього рівняння є

$$y(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \frac{\sin \lambda x}{\lambda}, \quad x \in \mathbb{R},$$

а функції $\cos \lambda x$ і $\sin \lambda x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (0.1).

Далі розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння III порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y''' = (-i\lambda)^3 y, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{0.2}$$

У статті Золотарьова Володимира Олексійовича [2] фундаментальну систему розв'язків цього рівняння було подано у спеціальному вигляді так, щоб функції цієї системи були узагальненнями функцій sin і cos, які утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння другого порядку (0.1).

У роботі [2] розглянуто таку систему фундаментальних розв'язків рівняння (0.2), які є подібними до косинусів і синусів для рівняння другого порядку:

$$c(z)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}e^{z\zeta_k},\qquad s(z)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\zeta_k}e^{z\zeta_k},\qquad d(z)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\zeta_k^2}e^{z\zeta_k},$$

де $z\in\mathbb{C}$, а ζ_1, ζ_2, ζ_3 — корені рівняння $\zeta^3=1$:

$$\zeta_1=1,\qquad \zeta_2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\qquad \zeta_3=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},$$

та одержано для них такі властивості:

(i)

$$s'(z)=c(z), d'(z)=s(z), c'(z)=d(z);$$

(ii)

$$\overline{c(z)}=c(\overline{z}), \overline{s(z)}=s(\overline{z}), \overline{d(z)}=d(\overline{z});$$

(iii)

$$c(z\zeta_2)=c(z), s(z\zeta_2)=\zeta_2 s(z), d(z\zeta_2)=\zeta_2^2 d(z);$$

(iv)

$$e^{z\zeta_p}=c(z)+\zeta_p s(z)+\zeta_p^2 d(z), (1\le p\le 3);$$

(v)

$$\begin{array}{lll} c(0)=1, & c'(0)=0, & c''(0)=0,\\ s(0)=0, & s'(0)=1, & s''(0)=0,\\ d(0)=0, & d'(0)=0, & d''(0)=1; \end{array}$$

(vi)

$$c^3(z)+s^3(z)+d^3(z)-3c(z)s(z)d(z)=1;$$

(vii)

$$c(z+w) = c(z)c(w) + s(z)d(w) + d(z)s(w),$$
$$s(z+w) = c(z)s(w) + s(z)c(w) + d(z)d(w),$$
$$d(z+w) = c(z)d(w) + s(z)s(w) + d(z)c(w);$$

(viii)

$$3c^2(z) = c(2z) + 2c(-z),$$
$$3s^2(z) = d(2z) + 2d(-z),$$
$$3d^2(z) = s(2z) + 2s(-z);$$

(ix)

$$s^2(z) - d(z)c(z) = d(-z),$$
$$d^2(z) - s(z)c(z) = s(-z),$$
$$c^2(z) - s(z)d(z) = c(-z);$$

(x)

$$c(z) = 1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots,$$
$$s(z) = z + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots,$$
$$d(z) = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots.$$

У цій кваліфікаційній роботі продовжується дослідження диференціальних рівнянь IV порядку, подібних до (0.1), (0.2), будуються аналоги функцій cos, sin, c, s, d та вивчаються їх властивості. Одержані результати застосовуються для вивчення впливу параметрів на розв'язки задачі Коші для цього рівняння.

Розділ 1
Дослідження властивостей аналогів функцій $\sin$ та $\cos$ для диференціального рівняння IV порядку

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y^{(4)} = (i\lambda)^4 y. \tag{1.1}$$

Тут і далі $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$. Для його розв'язання складемо характеристичне рівняння:

$$\xi^4 = \lambda^4.$$

Тепер ми маємо два рівняння: $\xi^{\mathbf{2}} = \lambda^{\mathbf{2}}$ та $\xi^{\mathbf{2}} = -\lambda^{\mathbf{2}}$, розв'язками яких є

$$\xi_1 = \lambda, \quad \xi_2 = -\lambda, \quad \xi_3 = i\lambda, \quad \xi_4 = -i\lambda.$$

Відмітимо, що усі корені 1-ої кратності. Маємо фундаментальну систему розв'язків рівняння (1.1):

$$\phi_1 = e^{\lambda x}, \quad \phi_2 = e^{-\lambda x}, \quad \phi_3 = e^{i\lambda x}, \quad \phi_4 = e^{-i\lambda x}.$$

За теоремою про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (див. [1, теорема 2.2.16]) одержуємо, що

$$y(x) = \sum_{1}^{4} C_i\phi_i = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + C_3 e^{i\lambda x} + C_4 e^{-i\lambda x}$$

є загальним розв'язком рівняння (1.1), де $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{C}$ - довільні сталі.

Далі виризимо наш розв'язок через тригонометричні функції. Для цього випишемо рівності, отримані за допомогою формули Ейлера:

$$\begin{aligned} \sin\lambda x &= \frac{1}{2i}\left(e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}\right), \\ \sinh\lambda x &= \frac{1}{2}\left(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right), \\ \cos\lambda x &= \frac{1}{2}\left(e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}\right), \\ \cosh\lambda x &= \frac{1}{2}\left(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}\right). \end{aligned}$$

Тепер виражаємо фундаментальну систему розв'язків у такому вигляді:

$$\begin{aligned} e^{i\lambda x} &= \cos\lambda x + i\sin\lambda x, \\ e^{-i\lambda x} &= \cos\lambda x - i\sin\lambda x, \\ e^{\lambda x} &= \cosh\lambda x + \sinh\lambda x, \\ e^{-\lambda x} &= \cosh\lambda x - \sinh\lambda x. \end{aligned}$$

Повернувшись до теореми про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (див. [1, теорема 2.2.16]) одержуємо, що

$$\begin{aligned} y(x) = {} & C_1(\cosh\lambda x + \sinh\lambda x) + C_2(\cosh\lambda x - \sinh\lambda x) \\ & + C_3(\cos\lambda x + i\sin\lambda x) + C_4(\cos\lambda x - i\sin\lambda x) \\ y(x) = {} & (C_1 + C_2)\cosh\lambda x + (C_1 - C_2)\sinh\lambda x \\ & + (C_3 + C_4)\cos\lambda x + i(C_3 - C_4)\sin\lambda x \\ y(x) = {} & K_1\cosh\lambda x + K_2\sinh\lambda x + K_3\cos\lambda x + K_4\sin\lambda x \end{aligned}$$

є загальним розв'язком рівняння (1.1), де $K_1, K_2, K_3, K_4 \in \mathbb{R}$ - довільні сталі.

Наступна задача полягатиме у розв'язанні чотирьох задач Коші до нашого лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами:

	s_1	s_2	s_3	s_4
$y(0) =$	1	0	0	0
$y'(0) =$	0	1	0	0
$y''(0) =$	0	0	1	0
$y'''(0) =$	0	0	0	1

Маємо:

$$\begin{aligned}
y(x) &= K_1 \cosh \lambda x + K_2 \sinh \lambda x + K_3 \cos \lambda x + K_4 \sin \lambda x, \\
y'(x) &= K_1 \lambda \sinh \lambda x + K_2 \lambda \cosh \lambda x - K_3 \lambda \sin \lambda x + K_4 \lambda \cos \lambda x, \\
y''(x) &= K_1 \lambda^2 \cosh \lambda x + K_2 \lambda^2 \sinh \lambda x - K_3 \lambda^2 \cos \lambda x - K_4 \lambda^2 \sin \lambda x, \\
y'''(x) &= K_1 \lambda^3 \sinh \lambda x + K_2 \lambda^3 \cosh \lambda x + K_3 \lambda^3 \sin \lambda x - K_4 \lambda^3 \cos \lambda x.
\end{aligned}$$

Задача 1:

$$\begin{aligned}
1 &= K_1 + K_3, \\
0 &= K_2 \lambda + K_4 \lambda, \\
0 &= K_1 \lambda^2 - K_3 \lambda^2, \\
0 &= K_2 \lambda^3 - K_4 \lambda^3.
\end{aligned}$$

Знаходячи звідси K_1, K_2, K_3, K_4, одержуємо $S_1(x) = \dfrac{1}{2}(\cosh \lambda x + \cos \lambda x)$.

Задача 2:

$$0 = K_1 + K_3,$$

$$1 = K_2\lambda + K_4\lambda,$$
$$0 = K_1\lambda^2 - K_3\lambda^2,$$
$$0 = K_2\lambda^3 - K_4\lambda^3.$$

Знаходячи звідси K_1, K_2, K_3, K_4, одержуємо $S_2(x) = \dfrac{1}{2\lambda}(\sinh\lambda x + \sin\lambda x)$.

Задача 3:

$$0 = K_1 + K_3,$$
$$0 = K_2\lambda + K_4\lambda,$$
$$1 = K_1\lambda^2 - K_3\lambda^2,$$
$$0 = K_2\lambda^3 - K_4\lambda^3.$$

Знаходячи звідси K_1, K_2, K_3, K_4, одержуємо $S_3(x) = \dfrac{1}{2\lambda^2}(\cosh\lambda x - \cos\lambda x)$

Задача 4:

$$0 = K_1 + K_3,$$
$$0 = K_2\lambda + K_4\lambda,$$
$$0 = K_1\lambda^2 - K_3\lambda^2,$$
$$1 = K_2\lambda^3 - K_4\lambda^3.$$

Знаходячи звідси K_1, K_2, K_3, K_4, одержуємо $S_4(x) = \dfrac{1}{2\lambda^3}(\sinh\lambda x - \sin\lambda x)$

Тепер маємо розв'язки всіх чотирьох задач Коші до нашого лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$S_1(x) = \frac{1}{2}(\cosh\lambda x + \cos\lambda x),$$
$$S_2(x) = \frac{1}{2\lambda}(\sinh\lambda x + \sin\lambda x),$$

$$S_3(x) = \frac{1}{2\lambda^2}(\cosh \lambda x - \cos \lambda x),$$
$$S_4(x) = \frac{1}{2\lambda^3}(\sinh \lambda x - \sin \lambda x).$$

Для зручності вивчення цих функцій покладемо $\lambda = 1$ і розглянемо ці функції для $x \in \mathbb{C}$. Тоді маємо:

$$s_1(x) = \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x),$$
$$s_2(x) = \frac{1}{2}(\sinh x + \sin x),$$
$$s_3(x) = \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x),$$
$$s_4(x) = \frac{1}{2}(\sinh x - \sin x).$$

Теорема 1.1. *Для функцій s_1, s_2, s_3, s_4 є справедливими властивості:*

$$\cosh x = s_1(x) + s_3(x),$$
$$\sinh x = s_2(x) + s_4(x),$$
$$\cos x = s_1(x) - s_3(x),$$
$$\sin x = s_2(x) - s_4(x).$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x) + \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x) \\
&= \frac{1}{2}\cosh x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cosh x - \frac{1}{2}\cos x = s_1(x) + s_3(x), \\
\sinh x &= \frac{1}{2}(\sinh x + \sin x) + \frac{1}{2}(\sinh x - \sin x) \\
&= \frac{1}{2}\sinh x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sinh x - \frac{1}{2}\sin x = s_2(x) + s_4(x), \\
\cos x &= \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x) - \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x) \\
&= \frac{1}{2}\cosh x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cosh x + \frac{1}{2}\cos x = s_1(x) - s_3(x),
\end{aligned}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}(\sinh x + \sin x) - \frac{1}{2}(\sinh x - \sin x)$$
$$= \frac{1}{2}\sinh x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sinh x + \frac{1}{2}\sin x = s_2(x) - s_4(x).$$

Теорема 1.2. *Функції s_1 та s_3 є парними, а s_2 та s_4 - непарними.*

Доведення.

$$s_1(-x) = \frac{1}{2}(\cosh(-x) + \cos(-x)) = \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x),$$
$$s_2(-x) = \frac{1}{2}(\sinh(-x) + \sin(-x)) = \frac{1}{2}(-\sinh x - \sin x)$$
$$= -\frac{1}{2}(\sinh x + \sin x),$$
$$s_3(-x) = \frac{1}{2}(\cosh(-x) - \cos(-x)) = \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x),$$
$$s_4(-x) = \frac{1}{2}(\sinh(-x) - \sin(-x)) = \frac{1}{2}(-\sinh x + \sin x)$$
$$= -\frac{1}{2}(\sinh x - \sin x).$$

Теорема 1.3. *Для функцій s_1, s_2, s_3, s_4 є справедливими властивості:*

$$s_1(ix) = s_1(x),$$
$$s_2(ix) = is_2(x),$$
$$s_3(ix) = -s_3(x),$$
$$s_4(ix) = -is_4(x).$$

Доведення.

$$s_1(ix) = \frac{1}{2}(\cosh(ix) + \cos(ix)) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \frac{e^{i^2x} + e^{-i^2x}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}\right),$$
$$s_2(ix) = \frac{1}{2}(\sinh(ix) + \sin(ix)) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} + \frac{e^{i^2x} - e^{-i^2x}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}+\frac{e^{-x}-e^{x}}{2i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2i}\right),$$
$$s_3(ix)=\frac{1}{2}(\cosh(ix)-\cos(ix))=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}-\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right),$$
$$s_4(ix)=\frac{1}{2}(\sinh(ix)-\sin(ix))=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}+\frac{e^{x}-e^{-x}}{2i}\right).$$

Теорема 1.4. *Для функцій s_1, s_2, s_3, s_4 є справедливими властивості:*

$$s_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{4m}}{(4m)!},$$
$$s_2(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!},$$
$$s_3(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{4m+2}}{(4m+2)!}$$
$$s_4(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{4m+3}}{(4m+3)!}$$

Доведення.

$$s_1(x)=\frac{1}{2}(\cosh x+\cos x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2x^{4m}}{(4m)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{4m}}{(4m)!},$$
$$s_2(x)=\frac{1}{2}(\sinh x+\sin x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2x^{4m+1}}{(4m+1)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!},$$
$$s_3(x)=\frac{1}{2}(\cosh x-\cos x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+2}}{(2m+2)!}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2x^{4m+2}}{(4m+2)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{4m+2}}{(4m+2)!},$$
$$s_4(x)=\frac{1}{2}(\sinh x-\sin x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+3}}{(2m+3)!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+3}}{(2m+3)!}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2x^{4m+3}}{(4m+3)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{4m+3}}{(4m+3)!}.$$

Теорема 1.5. *Для похідних функцій s_1, s_2, s_3, s_4 є справедливими властивості:*

$$\begin{aligned} s_1'(x) &= s_4(x),\\ s_2'(x) &= s_1(x),\\ s_3'(x) &= s_2(x),\\ s_4'(x) &= s_3(x). \end{aligned}$$

Доведення.

$$\begin{aligned} s_1'(x) &= \left(\frac{1}{2}(\cosh x + \cos x)\right)' = \frac{1}{2}(\sinh x - \sin x),\\ s_2'(x) &= \left(\frac{1}{2}(\sinh x + \sin x)\right)' = \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x),\\ s_3'(x) &= \left(\frac{1}{2}(\cosh x - \cos x)\right)' = \frac{1}{2}(\sinh x + \sin x),\\ s_4'(x) &= \left(\frac{1}{2}(\sinh x - \sin x)\right)' = \frac{1}{2}(\cosh x - \cos x). \end{aligned}$$

Теорема 1.6. *Для функцій s_1, s_2, s_3, s_4 є справедливими властивості:*

$$\begin{aligned} s_1(x+y) &= s_1(x)s_1(y) + s_3(x)s_3(y) + s_2(x)s_4(y) + s_4(x)s_2(y),\\ s_2(x+y) &= s_2(x)s_1(y) + s_4(x)s_3(y) + s_1(x)s_2(y) + s_3(x)s_4(y),\\ s_3(x+y) &= s_1(x)s_3(y) + s_3(x)s_1(y) + s_2(x)s_2(y) + s_4(x)s_4(y),\\ s_4(x+y) &= s_2(x)s_3(y) + s_4(x)s_1(y) + s_1(x)s_4(y) + s_3(x)s_2(y). \end{aligned}$$

Доведення.

$$s_1(x+y) = \frac{1}{2}(\cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y + \cos x\cos y - \sin x\sin y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}((s_1(x)+s_3(x))(s_1(y)+s_3(y))+(s_2(x)+s_4(x))(s_2(y)+s_4(y))\\
&+(s_1(x)-s_3(x))(s_1(y)-s_3(y))-(s_2(x)-s_4(x))(s_2(y)-s_4(y)))\\
&= \frac{1}{2}(2s_1(x)s_1(y)+s_1(x)s_3(y)-s_1(x)s_3(y)+s_3(x)s_1(y)-s_3(x)s_1(y)\\
&+2s_3(x)s_3(y)+s_2(x)s_2(y)-s_2(x)s_2(y)+2s_2(x)s_4(y)+2s_4(x)s_2(y)\\
&+s_4(x)s_4(y)-s_4(x)s_4(y)) = s_1(x)s_1(y)+s_3(x)s_3(y)+s_2(x)s_4(y)\\
&+s_4(x)s_2(y),\\
s_2(x+y) &= \frac{1}{2}(\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y+\sin x\cos y+\cos x\sin y)\\
&= \frac{1}{2}((s_2(x)+s_4(x))(s_1(y)+s_3(y))+(s_1(x)+s_3(x))(s_2(y)+s_4(y))\\
&+(s_2(x)-s_4(x))(s_1(y)-s_3(y))+(s_1(x)-s_3(x))(s_2(y)-s_4(y)))\\
&= \frac{1}{2}(2s_2(x)s_1(y)+2s_4(x)s_3(y)+2s_1(x)s_2(y)+2s_3(x)s_4(y))\\
&= s_2(x)s_1(y)+s_4(x)s_3(y)+s_1(x)s_2(y)+s_3(x)s_4(y),\\
s_3(x+y) &= \frac{1}{2}(\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y-\cos x\cos y+\sin x\sin y)\\
&= \frac{1}{2}((s_1(x)+s_3(x))(s_1(y)+s_3(y))+(s_2(x)+s_4(x))(s_2(y)+s_4(y))\\
&-(s_1(x)-s_3(x))(s_1(y)-s_3(y))+(s_2(x)-s_4(x))(s_2(y)-s_4(y)))\\
&= \frac{1}{2}(2s_1(x)s_3(y)+2s_3(x)s_1(y)+2s_2(x)s_2(y)+2s_4(x)s_4(y))\\
&= s_1(x)s_3(y)+s_3(x)s_1(y)+s_2(x)s_2(y)+s_4(x)s_4(y),\\
s_4(x+y) &= \frac{1}{2}(\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y-\sin x\cos y-\cos x\sin y)\\
&= \frac{1}{2}((s_2(x)+s_4(x))(s_1(y)+s_3(y))+(s_1(x)+s_3(x))(s_2(y)+s_4(y))\\
&-(s_2(x)-s_4(x))(s_1(y)-s_3(y))-(s_1(x)-s_3(x))(s_2(y)-s_4(y)))\\
&= \frac{1}{2}(2s_2(x)s_3(y)+2s_4(x)s_1(y)+2s_1(x)s_4(y)+2s_3(x)s_2(y))\\
&= s_2(x)s_3(y)+s_4(x)s_1(y)+s_1(x)s_4(y)+s_3(x)s_2(y).
\end{aligned}
$$

Теорема 1.7. *Для функцій s_1, s_2, s_3, s_4 є справедливими властивості:*

$$\sum_{k=1}^{4} s_k^2(x) - 2\sum_{k=1}^{2} s_k s_{k+2} = 1.$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x + \sin^2 x = 1,\\
&(s_1(x) - s_3(x))^2 + (s_2(x) - s_4(x))^2 = 1,\\
&s_1^2(x) - 2s_1(x)s_3(x) + s_3^2(x) + s_2^2(x) - 2s_2(x)s_4(x) + s_4^2(x) = 1,\\
&\sum_{k=1}^{4} s_k^2(x) - 2\sum_{k=1}^{2} s_k s_{k+2} = 1.
\end{aligned}$$

Теорема 1.8. *Для функцій s_1, s_2, s_3, s_4 є справедливими властивості:*

$$\sum_{k=0}^{3} (-1)^k s_{k+1}^2(x) + 2\sum_{k=0}^{1} (-1)^k s_{k+1} s_{k+3} = 1.$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
&\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,\\
&(s_1(x) + s_3(x))^2 - (s_2(x) + s_4(x))^2 = 1,\\
&s_1^2(x) + 2s_1(x)s_3(x) + s_3^2(x) - s_2^2(x) - 2s_2(x)s_4(x) - s_4^2(x) = 1,\\
&\sum_{k=0}^{3} (-1)^k s_{k+1}^2(x) + 2\sum_{k=0}^{1} (-1)^k s_{k+1} s_{k+3} = 1.
\end{aligned}$$

У подальшому отримані властивості функцій s_1, s_2, s_3, s_4 нададуть більше можливостей для дослідження впливу параметрів на розв'язки диференціального рівняння IV порядку.

Розділ 2
Дослідження неоднорідного диференціального рівняння IV порядку

Маємо лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами з правою частиною спеціального виду

$$y^{(4)} = (i\lambda)^4 y + f(\lambda, t), \quad t \in (0, T), \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} y(0,\lambda) = y_0^0(\lambda), \\ y'(0,\lambda) = y_0^1(\lambda), \\ y''(0,\lambda) = y_0^2(\lambda), \\ y'''(0,\lambda) = y_0^3(\lambda), \end{cases} \tag{2.2}$$

де $y_0^0 \in C(\mathbb{C})$, $y_0^1 \in C(\mathbb{C})$, $y_0^2 \in C(\mathbb{C})$, $y_0^3 \in C(\mathbb{C})$, $f(\lambda, t) = -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} i\lambda u_2(t) - \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(i\lambda)^3 u_0(t)$, $t \in (0, T)$, $u_0 \in L^2(0, T)$, $u_2 \in L^2(0, T)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Задача Коші (2.1), (2.2) містить два параметри: u_0 та u_2.

У цьому розділі ми розглядаємо таку задачу:

Задача 2.1. Нехай задано $y_T^0 \in C(\mathbb{C})$, $y_T^1 \in C(\mathbb{C})$, $y_T^2 \in C(\mathbb{C})$, $y_T^3 \in C(\mathbb{C})$. Знайти $u_0 \in L^2(0, T)$ і $u_2 \in L^2(0, T)$ так, щоб було виконано наступну умову:

$$\begin{cases} y(T,\lambda) = y_T^0(\lambda), \\ y'(T,\lambda) = y_T^1(\lambda), \\ y''(T,\lambda) = y_T^2(\lambda), \\ y'''(T,\lambda) = y_T^3(\lambda), \end{cases} \tag{2.3}$$

Для знаходження параметрів $u_0 \in L^2(0,T)$ та $u_2 \in L^2(0,T)$ ми одержуємо систему інтегральних рівнянь, необхідні умови її розв'язності та ілюструємо результати прикладами.

Загальним розв'язком лінійного диференціального рівняння є розв'язок лінійного однорідного рівняння і одного частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Повернемось до нашого лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y^{(4)} = (i\lambda)^4 y. \tag{2.4}$$

Функції $s_1(\lambda t)$, $\dfrac{s_2(\lambda t)}{\lambda}$, $\dfrac{s_3(\lambda t)}{\lambda^2}$, $\dfrac{s_4(\lambda t)}{\lambda^3}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (2.4) згідно з дослідженнями, викладеними у розділі 1. Запишемо задачу в матричному вигляді:

$$Y(t,\lambda) = \begin{pmatrix} y(t,\lambda) \\ y'(t,\lambda) \\ y''(t,\lambda) \\ y'''(t,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^0(t,\lambda) \\ Y^1(t,\lambda) \\ Y^2(t,\lambda) \\ Y^3(t,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Випишемо похідну:

$$\dot{Y}(t,\lambda) = \begin{pmatrix} \dot{Y}^0(t,\lambda) \\ \dot{Y}^1(t,\lambda) \\ \dot{Y}^2(t,\lambda) \\ \dot{Y}^3(t,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^1(t,\lambda) \\ Y^2(t,\lambda) \\ Y^3(t,\lambda) \\ \lambda^4 Y^0(t,\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(t,\lambda) \end{pmatrix}.$$

А також

$$\dot{Y}(t,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda^4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y(t,\lambda) + F(t,\lambda).$$

Отже, отримано систему:

$$\begin{cases} \dot{Y} = AY + F, \\ \quad Y(0) = Y^0, \end{cases}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda^4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} y_0^0 \\ y_0^1 \\ y_0^2 \\ y_0^3 \end{pmatrix}, \quad Y^T = \begin{pmatrix} y_T^0 \\ y_T^1 \\ y_T^2 \\ y_T^3 \end{pmatrix}.$$

Далі розглянемо наступну однорідну систему:

$$\begin{cases} \dot{Y} = AY, \\ Y(0) = Y^0. \end{cases}$$

Записуємо фундаментальну матрицю розв'язків, де, починаючи з другого, елементи рядка є похідними відповідних елементів попереднього рядка:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} s_1(\lambda t) & \dfrac{s_2(\lambda t)}{\lambda} & \dfrac{s_3(\lambda t)}{\lambda^2} & \dfrac{s_4(\lambda t)}{\lambda^3} \\ \lambda s_4(\lambda t) & s_1(\lambda t) & \dfrac{s_2(\lambda t)}{\lambda} & \dfrac{s_3(\lambda t)}{\lambda^2} \\ \lambda^2 s_3(\lambda t) & \lambda s_4(\lambda t) & s_1(\lambda t) & \dfrac{s_2(\lambda t)}{\lambda} \\ \lambda^3 s_2(\lambda t) & \lambda^2 s_3(\lambda t) & \lambda s_4(\lambda t) & s_1(\lambda t) \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Розглянемо значення функцій $s_1(\lambda t), s_2(\lambda t), s_3(\lambda t), s_4(\lambda t)$ в нулі. Завдяки побудові функцій, маємо:

$$s_1(0) = 1, \quad s_2(0) = 0, \quad s_3(0) = 0, \quad s_4(0) = 0.$$

Враховуючи це,

$$\Phi(0) = \mathbb{I},$$
$$\Phi(t) = e^{tA},$$
$$\Phi^{-1}(t) = e^{-tA}.$$

За наслідком з теореми про фундаментальність матричної експоненти (див. [1, наслідок 2.4.45]), загальний розв'язок має вигляд:

$$Y(t,\lambda) = e^{tA}Y^0 + \int\limits_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\xi)F(\xi,\lambda)\mathrm{d}\xi,$$
$$\Phi(t)\Phi^{-1}(\xi) = e^{(t-\xi)A},$$
$$Y(t,\lambda) = e^{tA}Y^0 + \int\limits_0^t e^{(t-\xi)A}F(\xi,\lambda)\mathrm{d}\xi.$$

Умова (2.3) еквівалентна умові $Y(T,\lambda) = Y^T$, тому при $t = T$ маємо:

$$e^{-TA}Y^T - Y^0 = \int\limits_0^T e^{-\xi A}F(\xi,\cdot)\mathrm{d}\xi.$$

Далі підрахуємо необхідні вирази:

$$e^{tA}Y^0 = \begin{pmatrix} s_1(\lambda t) & \dfrac{s_2(\lambda t)}{\lambda} & \dfrac{s_3(\lambda t)}{\lambda^2} & \dfrac{s_4(\lambda t)}{\lambda^3} \\ \lambda s_4(\lambda t) & s_1(\lambda t) & \dfrac{s_2(\lambda t)}{\lambda} & \dfrac{s_3(\lambda t)}{\lambda^2} \\ \lambda^2 s_3(\lambda t) & \lambda s_4(\lambda t) & s_1(\lambda t) & \dfrac{s_2(\lambda t)}{\lambda} \\ \lambda^3 s_2(\lambda t) & \lambda^2 s_3(\lambda t) & \lambda s_4(\lambda t) & s_1(\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0^0 \\ y_0^1 \\ y_0^2 \\ y_0^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s_1(\lambda t)y_0^0 & + & \dfrac{s_2(\lambda t)}{\lambda}y_0^1 & + & \dfrac{s_3(\lambda t)}{\lambda^2}y_0^2 & + & \dfrac{s_4(\lambda t)}{\lambda^3}y_0^3 \\ \lambda s_4(\lambda t)y_0^0 & + & s_1(\lambda t)y_0^1 & + & \dfrac{s_2(\lambda t)}{\lambda}y_0^2 & + & \dfrac{s_3(\lambda t)}{\lambda^2}y_0^3 \\ \lambda^2 s_3(\lambda t)y_0^0 & + & \lambda s_4(\lambda t)y_0^1 & + & s_1(\lambda t)y_0^2 & + & \dfrac{s_2(\lambda t)}{\lambda}y_0^3 \\ \lambda^3 s_2(\lambda t)y_0^0 & + & \lambda^2 s_3(\lambda t)y_0^1 & + & \lambda s_4(\lambda t)y_0^2 & + & s_1(\lambda t)y_0^3 \end{pmatrix},$$

а також

$$e^{(t-\xi)A}F(\xi,\lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} s_1(\lambda(t-\xi)) & \dfrac{s_2(\lambda(t-\xi))}{\lambda} & \dfrac{s_3(\lambda(t-\xi))}{\lambda^2} & \dfrac{s_4(\lambda(t-\xi))}{\lambda^3} \\ \lambda s_4(\lambda(t-\xi)) & s_1(\lambda(t-\xi)) & \dfrac{s_2(\lambda(t-\xi))}{\lambda} & \dfrac{s_3(\lambda(t-\xi))}{\lambda^2} \\ \lambda^2 s_3(\lambda(t-\xi)) & \lambda s_4(\lambda(t-\xi)) & s_1(\lambda(t-\xi)) & \dfrac{s_2(\lambda(t-\xi))}{\lambda} \\ \lambda^3 s_2(\lambda(t-\xi)) & \lambda^2 s_3(\lambda(t-\xi)) & \lambda s_4(\lambda(t-\xi)) & s_1(\lambda(t-\xi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(\xi,\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{s_4(\lambda(t-\xi))}{\lambda^3} f(\xi,\lambda) \\ \dfrac{s_3(\lambda(t-\xi))}{\lambda^2} f(\xi,\lambda) \\ \dfrac{s_2(\lambda(t-\xi))}{\lambda} f(\xi,\lambda) \\ s_1(\lambda(t-\xi)) f(\xi,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$e^{-\xi A} F(\xi,\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{s_4(\lambda(-\xi))}{\lambda^3} f(\xi,\lambda) \\ \dfrac{s_3(\lambda(-\xi))}{\lambda^2} f(\xi,\lambda) \\ \dfrac{s_2(\lambda(-\xi))}{\lambda} f(\xi,\lambda) \\ s_1(\lambda(-\xi)) f(\xi,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{s_4(\lambda\xi)}{\lambda^3} f(\xi,\lambda) \\ \dfrac{s_3(\lambda\xi)}{\lambda^2} f(\xi,\lambda) \\ -\dfrac{s_2(\lambda\xi)}{\lambda} f(\xi,\lambda) \\ s_1(\lambda\xi) f(\xi,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$W = e^{-TA} Y^T - Y^0, \quad W = \begin{pmatrix} W_4 \\ W_3 \\ W_2 \\ W_1 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$\begin{cases} W_4(\lambda) = -\displaystyle\int_0^T \frac{s_4(\lambda\xi)}{\lambda^3} f(\xi,\lambda), \\ W_3(\lambda) = \displaystyle\int_0^T \frac{s_3(\lambda\xi)}{\lambda^2} f(\xi,\lambda), \\ W_2(\lambda) = -\displaystyle\int_0^T \frac{s_2(\lambda\xi)}{\lambda} f(\xi,\lambda), \\ W_1(\lambda) = \displaystyle\int_0^T s_1(\lambda\xi) f(\xi,\lambda). \end{cases} \tag{2.6}$$

Підбиваючи підсумки, одержуємо таку теорему:

Теорема 2.2. *Задача (2.1)–(2.3) є розв'язною тоді і лише тоді, коли розв'язною є система інтегральних рівнянь (2.6).*

Далі розглянемо необхідні умови розв'язності системи інтегральних рівнянь (2.6).

Теорема 2.3. *Нехай $u_2 = 0$. Якщо існує $u_0 \in L^2(0,T)$, яке задовольняє (2.6), то W_1, W_2, W_3, W_4 задовільняють наступні умови*

$$\frac{W_2(i\lambda)}{\lambda^2} - W_4(i\lambda) = i\left(W_4(\lambda) - \frac{W_2(\lambda)}{\lambda^2}\right),$$

$$i\left(W_3(i\lambda) - \frac{W_1(i\lambda)}{\lambda^2}\right) = W_3(\lambda) - \frac{W_1(\lambda)}{\lambda^2}.$$

Доведення.

(i)

$$W_4(\lambda) = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T (\sinh(\lambda\xi) - \sin(\lambda\xi))u_0(\xi)\,d\xi,$$

(ii)

$$\frac{W_2(\lambda)}{(i\lambda)^2} = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T (\sinh(\lambda\xi) + \sin(\lambda\xi))u_0(\xi)\,d\xi,$$

(i+ii)

$$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \sin(\lambda\xi))u_0(\xi)\,d\xi = W_4(\lambda) + \frac{W_2(\lambda)}{(i\lambda)^2},$$

(i-ii)

$$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \sinh(\lambda\xi))u_0(\xi)\,d\xi = \frac{W_2(\lambda)}{(i\lambda)^2} - W_4(\lambda),$$

також для $\lambda := i\lambda$ маємо

$$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T i\sin(\lambda\xi))u_0(\xi)\,d\xi = \frac{W_2(i\lambda)}{(-\lambda)^2} - W_4(i\lambda).$$

Отже,

$$\frac{W_2(i\lambda)}{\lambda^2} - W_4(i\lambda) = i\left(W_4(\lambda) - \frac{W_2(\lambda)}{\lambda^2}\right).$$

Далі розглянемо

(iii)

$$W_3(\lambda) = \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T (\cosh(\lambda\xi) - \cos(\lambda\xi))u_0(\xi)\,d\xi,$$

(iv)

$$\frac{W_1(\lambda)}{(i\lambda)^2} = -\frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T (\cosh(\lambda\xi) + \cos(\lambda\xi))u_0(\xi)\,d\xi,$$

(iii+iv)

$$-i\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \cos(\lambda\xi))u_0(\xi)\,d\xi = W_3(\lambda) + \frac{W_1(\lambda)}{(i\lambda)^2},$$

(iii-iv)

$$i\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \cosh(\lambda\xi))u_0(\xi)\,d\xi = W_3(\lambda) - \frac{W_1(\lambda)}{(i\lambda)^2},$$

також для $\lambda := i\lambda$ маємо

$$-\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \cos(\lambda\xi))u_0(\xi)\,d\xi = W_3(i\lambda) - \frac{W_1(i\lambda)}{(-\lambda)^2}.$$

Отже,

$$i\left(W_3(i\lambda) - \frac{W_1(i\lambda)}{\lambda^2}\right) = W_3(\lambda) - \frac{W_1(\lambda)}{\lambda^2}.$$

□

Отримано необхідні умови, при яких (2.6) має розв'язок.

Розглянемо тепер приклади, які ілюструють теорему 2.3. Перейдемо до підрахування прикладів з конкретними u_0 та u_2.

Приклад 2.4. Нехай $u_0 = 1, u_2 = 0$. Обчислимо W_1, W_2, W_3, W_4 і перевіримо необхідні умови з теореми 2.3.

Порахуємо допоміжні інтеграли, що стануть у нагоді у подальших розрахунках:

$$\int_0^T \sin(\lambda(-\xi))\,d\xi = \begin{bmatrix} u = \lambda\xi, & \xi = \dfrac{u}{\lambda} \\ d\xi = \dfrac{1}{\lambda}\,du & \end{bmatrix} = -\int_0^T \frac{\sin u}{\lambda}\,du$$
$$= \frac{\cos u}{\lambda}\Big|_0^T = \frac{\cos\lambda\xi}{\lambda}\Big|_0^T = \frac{\cos\lambda T}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}, \tag{2.7}$$
$$\int_0^T \sinh(\lambda(-\xi))\,d\xi = \begin{bmatrix} u = \lambda\xi, & \xi = \dfrac{u}{\lambda} \\ d\xi = \dfrac{1}{\lambda}\,du & \end{bmatrix} = -\int_0^T \frac{\sinh u}{\lambda}\,du$$
$$= -\frac{\cosh u}{\lambda}\Big|_0^T = -\frac{\cosh\lambda\xi}{\lambda}\Big|_0^T = -\frac{\cosh\lambda T}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}, \tag{2.8}$$
$$\int_0^T \cos(\lambda(-\xi))\,d\xi = \begin{bmatrix} u = \lambda\xi, & \xi = \dfrac{u}{\lambda} \\ d\xi = \dfrac{1}{\lambda}\,du & \end{bmatrix} = \int_0^T \frac{\cos u}{\lambda}\,du$$
$$= \frac{\sin u}{\lambda}\Big|_0^T = \frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}\Big|_0^T = \frac{\sin\lambda T}{\lambda}, \tag{2.9}$$
$$\int_0^T \cosh(\lambda(-\xi))\,d\xi = \begin{bmatrix} u = \lambda\xi, & \xi = \dfrac{u}{\lambda} \\ d\xi = \dfrac{1}{\lambda}\,du & \end{bmatrix} = \int_0^T \frac{\cosh u}{\lambda}\,du$$
$$= \frac{\sinh u}{\lambda}\Big|_0^T = \frac{\sinh\lambda\xi}{\lambda}\Big|_0^T = \frac{\sinh\lambda T}{\lambda}. \tag{2.10}$$

Перейдемо до підрахування основних інтегралів.

$$\begin{aligned} f(\lambda,\xi) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}(i\lambda)^3, \\ W_4(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda^3} s_4(\lambda(-\xi)) f(\lambda,\xi)\,d\xi \\ &= \int_0^T \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sinh(\lambda(-\xi)) - \sin(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\ &= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T (\sinh(\lambda(-\xi)) - \sin(\lambda(-\xi)))\,d\xi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^T \sinh(\lambda(-\xi))\,d\xi - \int_0^T \sin(\lambda(-\xi))\,d\xi\right) \\
&= \begin{bmatrix} u = \lambda\xi, & \xi = \dfrac{u}{\lambda} \\ d\xi = \dfrac{1}{\lambda}\,du & \end{bmatrix} = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\int_0^T \frac{\sinh u}{\lambda}\,du + \int_0^T \frac{\sin u}{\lambda}\,du\right) \\
&= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cosh\lambda T}{\lambda} - \frac{\cos\lambda T}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) \\
&= \frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(2 - \cosh\lambda T - \cos\lambda T\right), \\
W_3(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda^2} s_3(\lambda(-\xi)) f(\lambda,\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\cosh(\lambda(-\xi)) - \cos(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^T \cosh(\lambda(-\xi))\,d\xi \int_0^T \cos(\lambda(-\xi))\,d\xi\right) \\
&= \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sinh\lambda T}{\lambda} - \frac{\sin\lambda T}{\lambda}\right) = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sinh\lambda T - \sin\lambda T\right), \\
W_2(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda} s_2(\lambda(-\xi)) f(\lambda,\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sinh(\lambda(-\xi)) + \sin(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= \frac{i\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^T \sinh(\lambda(-\xi))\,d\xi + \int_0^T \sin(\lambda(-\xi))\,d\xi\right) \\
&= \frac{i\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cosh\lambda T}{\lambda} + \frac{\cos\lambda T}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right) \\
&= \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\cos\lambda T - \cosh\lambda T\right), \\
W_1(\lambda) &= \int_0^T s_1(\lambda(-\xi)) f(\lambda,\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda^3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\cosh(\lambda(-\xi)) + \cos(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= \frac{i\lambda^3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^T \cosh(\lambda(-\xi))\,d\xi + \int_0^T \cos(\lambda(-\xi))\,d\xi\right) \\
&= \frac{i\lambda^3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sinh\lambda T}{\lambda} + \frac{\sin\lambda T}{\lambda}\right) = \frac{i\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sinh\lambda T + \sin\lambda T\right).
\end{aligned}
$$

Отже, при $u_0 = 1$, $u_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
W_4(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(2 - \cosh\lambda T - \cos\lambda T\right),\\
W_3(\lambda) &= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sinh\lambda T - \sin\lambda T\right),\\
W_2(\lambda) &= \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\cos\lambda T - \cosh\lambda T\right),\\
W_1(\lambda) &= \frac{i\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sinh\lambda T + \sin\lambda T\right).
\end{aligned}
$$

Тепер перевіримо, чи виконуються необхідні умови. Порахуємо спочатку $W_2(i\lambda)$ та $W_4(i\lambda)$:

$$
\begin{aligned}
W_2(i\lambda) &= \int_0^T -\frac{1}{2i\lambda}\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)(i^2\lambda)^3(\sinh i\lambda\xi + \sin i\lambda\xi)d\xi\\
&= -\frac{\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T(\sin\lambda\xi + \sinh\lambda\xi)d\xi = \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\cos\lambda T - \cosh\lambda T),\\
W_4(i\lambda) &= \int_0^T -\frac{1}{2(i\lambda)^3}\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)(i^2\lambda)^3(\sinh i\lambda\xi - \sin i\lambda\xi)d\xi\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T(\sin\lambda\xi - \sinh\lambda\xi)d\xi = \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2 - \cos\lambda T - \cosh\lambda T).
\end{aligned}
$$

Підставляємо:

$$
\begin{aligned}
&\frac{W_2(i\lambda)}{\lambda^2} - W_4(i\lambda) = i\left(W_4(\lambda) - \frac{W_2(\lambda)}{\lambda^2}\right),\\
&\frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\cos\lambda T - \cosh\lambda T - 2 + \cos\lambda T + \cosh\lambda T)\\
&= i\left(\frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(2 - \cosh\lambda T - \cos\lambda T - \cos\lambda T + \cosh\lambda T\right)\right),\\
&\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\cos\lambda T - 1) = -\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1 - \cos\lambda T).
\end{aligned}
$$

Порахуємо $W_1(i\lambda)$ та $W_3(i\lambda)$:

$$\begin{aligned}
W_1(i\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)(i^2\lambda)^3(\cosh i\lambda\xi + \cos i\lambda\xi)d\xi \\
&= \frac{\lambda^3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T(\cos\lambda\xi + \cosh\lambda\xi)d\xi = \frac{\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin\lambda T + \sinh\lambda T), \\
W_3(i\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{2(i\lambda)^2}\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)(i^2\lambda)^3(\cosh i\lambda\xi - \cos i\lambda\xi)d\xi \\
&= -\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T(\cos\lambda\xi - \cosh\lambda\xi)d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sinh\lambda T - \sin\lambda T).
\end{aligned}$$

Підставляємо:

$$\begin{aligned}
& i\left(W_3(i\lambda) - \frac{W_1(i\lambda)}{\lambda^2}\right) = W_3(\lambda) - \frac{W_1(\lambda)}{\lambda^2}, \\
& i\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sinh\lambda T - \sin\lambda T - \sin\lambda T - \sinh\lambda T)\right) \\
& \quad = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sinh\lambda T - \sin\lambda T - \sinh\lambda T - \sin\lambda T\right).
\end{aligned}$$

Обидві фінальні рівності виконуються, отже, необхідні умови виконані.

Приклад 2.5. Нехай $u_0 = 0, u_2 = 1$. Обчислимо W_1, W_2, W_3, W_4. Маємо:

$$\begin{aligned}
f(\lambda,\xi) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}i\lambda, \\
W_4(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda^3}s_4(\lambda(-\xi))f(\lambda,\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^T -\frac{i}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sinh(\lambda(-\xi)) - \sin(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= -\frac{i}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^T \sinh(\lambda(-\xi))\,d\xi - \int_0^T \sin(\lambda(-\xi))\,d\xi\right) \\
&= -\frac{i}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cosh\lambda T}{\lambda} - \frac{\cos\lambda T}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right) \\
&= -\frac{i}{2\lambda^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(2 - \cosh\lambda T - \cos\lambda T\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_3(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda^2} s_3(\lambda(-\xi)) f(\lambda,\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^T -\frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\cosh(\lambda(-\xi)) - \cos(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= -\frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^T \cosh(\lambda(-\xi))\,d\xi - \int_0^T \cos(\lambda(-\xi))\,d\xi\right) \\
&= -\frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sinh\lambda T}{\lambda} - \frac{\sin\lambda T}{\lambda}\right) = -\frac{i}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sinh\lambda T - \sin\lambda T\right), \\
W_2(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda} s_2(\lambda(-\xi)) f(\lambda,\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^T -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sinh(\lambda(-\xi)) + \sin(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^T \sinh(\lambda(-\xi))\,d\xi + \int_0^T \sin(\lambda(-\xi))\,d\xi\right) \\
&= -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cosh\lambda T}{\lambda} + \frac{\cos\lambda T}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right) \\
&= -\frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\cos\lambda T - \cosh\lambda T\right), \\
W_1(\lambda) &= \int_0^T s_1(\lambda(-\xi)) f(\lambda,\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^T -\frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\cosh(\lambda(-\xi)) + \cos(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= -\frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^T \cosh(\lambda(-\xi))\,d\xi + \int_0^T \cos(\lambda(-\xi))\,d\xi\right) \\
&= -\frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sinh\lambda T}{\lambda} + \frac{\sin\lambda T}{\lambda}\right) = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sinh\lambda T + \sin\lambda T\right).
\end{aligned}
$$

Отже, при $u_0 = 0$, $u_2 = 1$

$$
\begin{aligned}
W_4(\lambda) &= -\frac{i}{2\lambda^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(2 - \cosh\lambda T - \cos\lambda T\right), \\
W_3(\lambda) &= -\frac{i}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sinh\lambda T - \sin\lambda T\right), \\
W_2(\lambda) &= -\frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\cos\lambda T - \cosh\lambda T\right),
\end{aligned}
$$

$$W_1(\lambda) = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sinh\lambda T + \sin\lambda T\right).$$

Приклад 2.6. Покладемо $u_0 = \xi, u_2 = 0$. Знайдемо W_1, W_2, W_3, W_4 і перевіримо необхідні умови з теореми 2.3.

Порахуємо допоміжні інтеграли, що стануть у нагоді у подальших розрахунках:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \xi\sinh(\lambda(-\xi))\,d\xi &= \begin{bmatrix} u=\xi, & dv=\sinh\lambda\xi d\xi \\ du=d\xi & v=\dfrac{\cosh\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix} \\
&= -\left.\frac{\xi\cosh\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T + \int_0^T \frac{\cosh\lambda\xi}{\lambda}d\xi \\
&= -\left.\frac{\xi\cosh\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T + \left.\frac{\sinh\lambda\xi}{\lambda^2}\right|_0^T = \frac{\sinh\lambda T}{\lambda^2} - \frac{T\cosh\lambda T}{\lambda}, \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \xi\sin(\lambda(-\xi))\,d\xi &= \begin{bmatrix} u=\xi, & dv=\sin\lambda\xi d\xi \\ du=d\xi & v=-\dfrac{\cos\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix} \\
&= \left.\frac{\xi\cos\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T - \int_0^T \frac{\cos\lambda\xi}{\lambda}d\xi \\
&= \left.\frac{\xi\cos\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T - \left.\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda^2}\right|_0^T = \frac{T\cos\lambda T}{\lambda} - \frac{\sin\lambda T}{\lambda^2}, \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \xi\cosh(\lambda(-\xi))\,d\xi &= \begin{bmatrix} u=\xi, & dv=\cosh\lambda\xi d\xi \\ du=d\xi & v=\dfrac{\sinh\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix} \\
&= \left.\frac{\xi\sinh\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T - \int_0^T \frac{\sinh\lambda\xi}{\lambda}d\xi \\
&= \left.\frac{\xi\sinh\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T - \left.\frac{\cosh\lambda\xi}{\lambda^2}\right|_0^T = \frac{T\sinh\lambda T}{\lambda} - \frac{\cosh\lambda T}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}, \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \xi\cos(\lambda(-\xi))\,d\xi &= \begin{bmatrix} u=\xi, & dv=\cos\lambda\xi d\xi \\ du=d\xi & v=\dfrac{\sin\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix} \\
&= \left.\frac{\xi\sin\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T - \int_0^T \frac{\sin\lambda\xi}{\lambda}d\xi \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\xi \sin \lambda\xi}{\lambda}\bigg|_0^T + \frac{\cos \lambda\xi}{\lambda^2}\bigg|_0^T = \frac{T \sin \lambda T}{\lambda} + \frac{\cos \lambda T}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}. \tag{2.15}$$

Перейдемо до підрахування основних інтегралів:

$$\begin{aligned}
f(\lambda, \xi) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}(i\lambda)^3 \xi, \\
W_4(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda^3} s_4(\lambda(-\xi)) f(\lambda, \xi)\, d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi (\sinh(\lambda(-\xi)) - \sin(\lambda(-\xi)))\, d\xi \\
&= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \xi (\sinh(\lambda(-\xi)) - \sin(\lambda(-\xi)))\, d\xi \\
&= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \xi \sinh(\lambda(-\xi))\, d\xi - \int_0^T \xi \sin(\lambda(-\xi))\, d\xi \right) \\
&= \frac{i}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sinh \lambda T - T\lambda \cosh \lambda T - T\lambda \cos \lambda T + \sin \lambda T \right), \\
W_3(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda^2} s_3(\lambda(-\xi)) f(\lambda, \xi)\, d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi (\cosh(\lambda(-\xi)) - \cos(\lambda(-\xi)))\, d\xi \\
&= \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \xi \cosh(\lambda(-\xi))\, d\xi - \int_0^T \xi \cos(\lambda(-\xi))\, d\xi \right) \\
&= \frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(T\lambda \sinh \lambda T - \cosh \lambda T - \cos \lambda T - T\lambda \sin \lambda T + 2 \right), \\
W_2(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda} s_2(\lambda(-\xi)) f(\lambda, \xi)\, d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi (\sinh(\lambda(-\xi)) + \sin(\lambda(-\xi)))\, d\xi \\
&= \frac{i\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \xi \sinh(\lambda(-\xi))\, d\xi + \int_0^T \xi \sin(\lambda(-\xi))\, d\xi \right) \\
&= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sinh \lambda T - T\lambda \cosh \lambda T + T\lambda \cos \lambda T - \sin \lambda T \right), \\
W_1(\lambda) &= \int_0^T s_1(\lambda(-\xi)) f(\lambda, \xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \frac{i\lambda^3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi(\cosh(\lambda(-\xi)) + \cos(\lambda(-\xi)))\, d\xi \\
&= \frac{i\lambda^3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^T \xi\cosh(\lambda(-\xi))\, d\xi + \int_0^T \xi\cos(\lambda(-\xi))\, d\xi\right) \\
&= \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(T\lambda\sinh\lambda T - \cosh\lambda T + \cos\lambda T + T\lambda\sin\lambda T\right).
\end{aligned}
$$

Отже, при $u_0 = \xi, u_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
W_4(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sinh\lambda T - T\lambda\cosh\lambda T - T\lambda\cos\lambda T + \sin\lambda T\right), \\
W_3(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(T\lambda\sinh\lambda T - \cosh\lambda T - \cos\lambda T - T\lambda\sin\lambda T + 2\right), \\
W_2(\lambda) &= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sinh\lambda T - T\lambda\cosh\lambda T + T\lambda\cos\lambda T - \sin\lambda T\right), \\
W_1(\lambda) &= \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(T\lambda\sinh\lambda T - \cosh\lambda T + \cos\lambda T + T\lambda\sin\lambda T\right).
\end{aligned}
$$

Тепер перевіримо, чи виконуються необхідні умови. Порахуємо спочатку $W_2(i\lambda)$ та $W_4(i\lambda)$:

$$
\begin{aligned}
W_2(i\lambda) &= -\frac{\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \xi(\sin\lambda\xi + \sinh\lambda\xi)d\xi \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(T\lambda\cosh\lambda T - T\lambda\cos\lambda T - \sinh\lambda T + \sin\lambda T), \\
W_4(i\lambda) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \xi(\sin\lambda\xi - \sinh\lambda\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin\lambda T - T\lambda\cosh\lambda T - T\lambda\cos\lambda T + \sinh\lambda T).
\end{aligned}
$$

Підставляємо:

$$
\begin{aligned}
&\frac{W_2(i\lambda)}{\lambda^2} - W_4(i\lambda) = i\left(W_4(\lambda) - \frac{W_2(\lambda)}{\lambda^2}\right), \\
&\frac{1}{\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(T\lambda\cos\lambda T - \sin\lambda T) = i\left(\frac{i}{\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin\lambda T - T\lambda\cos\lambda T)\right).
\end{aligned}
$$

Порахуємо $W_1(i\lambda)$ та $W_3(i\lambda)$:

$$\begin{aligned}
W_1(i\lambda) &= \frac{\lambda^3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \xi(\cos\lambda\xi + \cosh\lambda\xi)d\xi \\
&= \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(T\lambda\sin\lambda T + \cos\lambda T + T\lambda\sinh\lambda T - \cosh\lambda T), \\
W_3(i\lambda) &= -\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \xi(\cos\lambda\xi - \cosh\lambda\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2 - T\lambda\sin\lambda T - \cos\lambda T + T\lambda\sinh\lambda T - \cosh\lambda T).
\end{aligned}$$

Підставляємо:

$$\begin{aligned}
&i\left(W_3(i\lambda) - \frac{W_1(i\lambda)}{\lambda^2}\right) = W_3(\lambda) - \frac{W_1(\lambda)}{\lambda^2}, \\
&i\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2 - \cos\lambda T - T\lambda\sin\lambda T)\right) \\
&\quad = \frac{i}{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2 - \cos\lambda T - T\lambda\sin\lambda T).
\end{aligned}$$

Обидві фінальні рівності виконуються, отже, необхідні умови виконані.

Приклад 2.7. Нехай $u_0 = 0, u_2 = \xi$. Обчислимо W_1, W_2, W_3, W_4. Маємо:

$$\begin{aligned}
W_4(\lambda) &= -\frac{i}{2\lambda^4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sinh\lambda T - T\lambda\cosh\lambda T - T\lambda\cos\lambda T + \sin\lambda T\right), \\
W_3(\lambda) &= -\frac{i}{2\lambda^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(T\lambda\sinh\lambda T - \cosh\lambda T - \cos\lambda T - T\lambda\sin\lambda T + 2\right), \\
W_2(\lambda) &= -\frac{i}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sinh\lambda T - T\lambda\cosh\lambda T + T\lambda\cos\lambda T - \sin\lambda T\right), \\
W_1(\lambda) &= -\frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(T\lambda\sinh\lambda T - \cosh\lambda T + \cos\lambda T + T\lambda\sin\lambda T\right).
\end{aligned}$$

Приклад 2.8. Далі розглянемо $u_0 = \xi^2, u_2 = 0$. Знайдемо W_1, W_2, W_3, W_4 і перевіримо необхідні умови з теореми 2.3. В подальшому будемо розглядати лише при $u_2 = 0$, так як це не впливає суттєво на результат, маємо лише зміни в множнику у $-\dfrac{1}{\lambda^2}$ разів.

Рахуємо допоміжні інтеграли:

$$\int_0^T \xi^2 \sinh(\lambda(-\xi))\,d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi^2, & dv = \sinh\lambda\xi d\xi \\ du = 2\xi d\xi & v = \dfrac{\cosh\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix}$$
$$= -\left.\frac{\xi^2\cosh\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T + \int_0^T \frac{2\xi\cosh\lambda\xi}{\lambda} d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi, & dv = \cosh\lambda\xi d\xi \\ du = d\xi & v = \dfrac{\sinh\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix}$$
$$= -\left.\frac{\xi^2\cosh\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T + \left.\frac{2\xi\sinh\lambda\xi}{\lambda^2}\right|_0^T - \frac{2}{\lambda}\int_0^T \frac{\sinh\lambda\xi}{\lambda} d\xi = -\left.\frac{\xi^2\cosh\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T$$
$$+ \left.\frac{2\xi\sinh\lambda\xi}{\lambda^2}\right|_0^T - \left.\frac{2\cosh\lambda\xi}{\lambda^3}\right|_0^T$$
$$= -\frac{T^2\cosh\lambda T}{\lambda} + \frac{2T\sinh\lambda T}{\lambda^2} - \frac{2\cosh\lambda T}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^3}, \tag{2.16}$$

$$\int_0^T \xi^2 \sin(\lambda(-\xi))\,d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi^2, & dv = \sin\lambda\xi d\xi \\ du = 2\xi d\xi & v = -\dfrac{\cos\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix}$$
$$= \left.\frac{\xi^2\cos\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T - \int_0^T \frac{2\xi\cos\lambda\xi}{\lambda} d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi, & dv = \cos\lambda\xi d\xi \\ du = d\xi & v = \dfrac{\sin\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix}$$
$$= \left.\frac{\xi^2\cos\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T - \left.\frac{2\xi\sin\lambda\xi}{\lambda^2}\right|_0^T + \frac{2}{\lambda}\int_0^T \frac{\sin\lambda\xi}{\lambda} d\xi = \left.\frac{\xi^2\cos\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T$$
$$- \left.\frac{2\xi\sin\lambda\xi}{\lambda^2}\right|_0^T - \left.\frac{2\cos\lambda\xi}{\lambda^3}\right|_0^T$$
$$= \frac{T^2\cos\lambda T}{\lambda} - \frac{2T\sin\lambda T}{\lambda^2} - \frac{2\cos\lambda T}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^3}, \tag{2.17}$$

$$\int_0^T \xi^2 \cosh(\lambda(-\xi))\,d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi^2, & dv = \cosh\lambda\xi d\xi \\ du = 2\xi d\xi & v = \dfrac{\sinh\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix}$$
$$= \left.\frac{\xi^2\sinh\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T - \int_0^T \frac{2\xi\sinh\lambda\xi}{\lambda} d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi, & dv = \sinh\lambda\xi d\xi \\ du = d\xi & v = \dfrac{\cosh\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\xi^2 \sinh \lambda\xi}{\lambda}\Big|_0^T - \frac{2\xi \cosh \lambda\xi}{\lambda^2}\Big|_0^T + \frac{2}{\lambda}\int_0^T \frac{\cosh \lambda\xi}{\lambda} d\xi = \frac{\xi^2 \sinh \lambda\xi}{\lambda}\Big|_0^T$$
$$- \frac{2\xi \cosh \lambda\xi}{\lambda^2}\Big|_0^T + \frac{2 \sinh \lambda\xi}{\lambda^3}\Big|_0^T$$
$$= \frac{T^2 \sinh \lambda T}{\lambda} - \frac{2T \cosh \lambda T}{\lambda^2} + \frac{2 \sinh \lambda T}{\lambda^3}, \tag{2.18}$$

$$\int_0^T \xi^2 \cos(\lambda(-\xi))\, d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi^2, & dv = \cos \lambda\xi d\xi \\ du = 2\xi d\xi & v = \dfrac{\sin \lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{\xi^2 \sin \lambda\xi}{\lambda}\Big|_0^T - \int_0^T \frac{2\xi \sin \lambda\xi}{\lambda} d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi, & dv = \sin \lambda\xi d\xi \\ du = d\xi & v = -\dfrac{\cos \lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{\xi^2 \sin \lambda\xi}{\lambda}\Big|_0^T + \frac{2\xi \cos \lambda\xi}{\lambda^2}\Big|_0^T - \frac{2}{\lambda}\int_0^T \frac{\cos \lambda\xi}{\lambda} d\xi = \frac{\xi^2 \sin \lambda\xi}{\lambda}\Big|_0^T$$
$$+ \frac{2\xi \cos \lambda\xi}{\lambda^2}\Big|_0^T - \frac{2 \sin \lambda\xi}{\lambda^3}\Big|_0^T$$
$$= \frac{T^2 \sin \lambda T}{\lambda} + \frac{2T \cos \lambda T}{\lambda^2} - \frac{2 \sin \lambda T}{\lambda^3}. \tag{2.19}$$

Перейдемо до підрахування основних інтегралів:

$$W_4(\lambda) = \int_0^T \frac{1}{\lambda^3} s_4(\lambda(-\xi)) f(\lambda, \xi)\, d\xi$$
$$= \int_0^T \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi^2 (\sinh(\lambda(-\xi)) - \sin(\lambda(-\xi)))\, d\xi$$
$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \xi^2 (\sinh(\lambda(-\xi)) - \sin(\lambda(-\xi)))\, d\xi$$
$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \xi^2 \sinh(\lambda(-\xi))\, d\xi - \int_0^T \xi^2 \sin(\lambda(-\xi))\, d\xi \right)$$
$$= \frac{i}{2\lambda^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} (-T^2\lambda^2 \cosh \lambda T + 2T\lambda \sinh \lambda T - 2 \cosh \lambda T$$
$$- T^2\lambda^2 \cos \lambda T + 2T\lambda \sin \lambda T + 2 \cos \lambda T),$$

$$W_3(\lambda) = \int_0^T \frac{1}{\lambda^2} s_3(\lambda(-\xi)) f(\lambda, \xi)\, d\xi$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi^2(\cosh(\lambda(-\xi)) - \cos(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^T \xi^2\cosh(\lambda(-\xi))\,d\xi - \int_0^T \xi^2\cos(\lambda(-\xi))\,d\xi\right) \\
&= \frac{i}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(T^2\lambda^2\sinh\lambda T - 2T\lambda\cosh\lambda T + 2\sinh\lambda T \\
&- T^2\lambda^2\sin\lambda T - 2T\lambda\cos\lambda T + 2\sin\lambda T), \\
W_2(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda}s_2(\lambda(-\xi))f(\lambda,\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi^2(\sinh(\lambda(-\xi)) + \sin(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= \frac{i\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^T \xi^2\sinh(\lambda(-\xi))\,d\xi + \int_0^T \xi^2\sin(\lambda(-\xi))\,d\xi\right) \\
&= \frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-T^2\lambda^2\cosh\lambda T + 2T\lambda\sinh\lambda T - 2\cosh\lambda T \\
&+ T^2\lambda^2\cos\lambda T - 2T\lambda\sin\lambda T - 2\cos\lambda T + 4), \\
W_1(\lambda) &= \int_0^T s_1(\lambda(-\xi))f(\lambda,\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda^3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi^2(\cosh(\lambda(-\xi)) + \cos(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= \frac{i\lambda^3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^T \xi^2\cosh(\lambda(-\xi))\,d\xi + \int_0^T \xi^2\cos(\lambda(-\xi))\,d\xi\right) \\
&= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(T^2\lambda^2\sinh\lambda T - 2T\lambda\cosh\lambda T + 2\sinh\lambda T \\
&+ T^2\lambda^2\sin\lambda T + 2T\lambda\cos\lambda T - 2\sin\lambda T).
\end{aligned}
$$

Отже, для $u_0 = \xi^2$, $u_2 = 0$ маємо

$$
\begin{aligned}
W_4(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-T^2\lambda^2\cosh\lambda T + 2T\lambda\sinh\lambda T - 2\cosh\lambda T \\
&- T^2\lambda^2\cos\lambda T + 2T\lambda\sin\lambda T + 2\cos\lambda T), \\
W_3(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(T^2\lambda^2\sinh\lambda T - 2T\lambda\cosh\lambda T + 2\sinh\lambda T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- T^2\lambda^2 \sin \lambda T - 2T\lambda \cos \lambda T + 2\sin \lambda T),\\
W_2(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-T^2\lambda^2 \cosh \lambda T + 2T\lambda \sinh \lambda T - 2\cosh \lambda T\\
&+ T^2\lambda^2 \cos \lambda T - 2T\lambda \sin \lambda T - 2\cos \lambda T + 4)),\\
W_1(\lambda) &= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(T^2\lambda^2 \sinh \lambda T - 2T\lambda \cosh \lambda T + 2\sinh \lambda T\\
&+ T^2\lambda^2 \sin \lambda T + 2T\lambda \cos \lambda T - 2\sin \lambda T).
\end{aligned}
$$

Тепер перевіримо, чи виконуються необхідні умови. Порахуємо спочатку $W_2(i\lambda)$ та $W_4(i\lambda)$:

$$
\begin{aligned}
W_2(i\lambda) &= -\frac{\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \xi^2(\sin \lambda\xi + \sinh \lambda\xi)d\xi\\
&= \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(T^2\lambda^2 \cos \lambda T - 2T\lambda \sin \lambda T - 2\cos \lambda T\\
&- T^2\lambda^2 \cosh \lambda T + 2T\lambda \sinh \lambda T - 2\cosh \lambda T + 4),\\
W_4(i\lambda) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \xi^2(\sin \lambda\xi - \sinh \lambda\xi)d\xi\\
&= \frac{1}{2\lambda^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-T^2\lambda^2 \cos \lambda T + 2T\lambda \sin \lambda T + 2\cos \lambda T\\
&- T^2\lambda^2 \cosh \lambda T + 2T\lambda \sinh \lambda T - 2\cosh \lambda T).
\end{aligned}
$$

Підставляємо:

$$
\begin{aligned}
&\frac{W_2(i\lambda)}{\lambda^2} - W_4(i\lambda) = i\left(W_4(\lambda) - \frac{W_2(\lambda)}{\lambda^2}\right),\\
&\frac{1}{\lambda^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(T^2\lambda^2 \cos \lambda T - 2T\lambda \sin \lambda T - 2\cos \lambda T + 4)\\
&= i\left(\frac{i}{\lambda^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-T^2\lambda^2 \cos \lambda T + 2\cos \lambda T + 2T\lambda \sin \lambda T - 4)\right).
\end{aligned}
$$

Порахуємо $W_1(i\lambda)$ та $W_3(i\lambda)$:

$$
\begin{aligned}
W_1(i\lambda) &= \frac{\lambda^3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \xi^2(\cos\lambda\xi + \cosh\lambda\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(T^2\lambda^2\sin\lambda T + 2T\lambda\cos\lambda T - 2\sin\lambda T + T^2\lambda^2\sinh\lambda T \\
&- 2T\lambda\cosh\lambda T + 2\sinh\lambda T), \\
W_3(i\lambda) &= -\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T \xi^2(\cos\lambda\xi - \cosh\lambda\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-T^2\lambda^2\sin\lambda T - 2T\lambda\cos\lambda T + 2\sin\lambda T + T^2\lambda^2\sinh\lambda T \\
&- 2T\lambda\cosh\lambda T + 2\sinh\lambda T).
\end{aligned}
$$

Підставляємо:

$$
\begin{aligned}
&i\left(W_3(i\lambda) - \frac{W_1(i\lambda)}{\lambda^2}\right) = W_3(\lambda) - \frac{W_1(\lambda)}{\lambda^2}, \\
&i\left(\frac{1}{\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-T^2\lambda^2\sin\lambda T - 2T\lambda\cos\lambda T + 2\sin\lambda T)\right) \\
&\quad = \frac{i}{\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-T^2\lambda^2\sin\lambda T - 2T\lambda\cos\lambda T + 2\sin\lambda T).
\end{aligned}
$$

Обидві фінальні рівності виконуються, отже, необхідні умови виконані.

Приклад 2.9. Далі розглянемо $u_0 = \xi^3, u_2 = 0$. Знайдемо W_1, W_2, W_3, W_4.

Рахуємо допоміжні інтеграли:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \xi^3\sinh(\lambda(-\xi))\,d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi^3, & dv = \sinh\lambda\xi d\xi \\ du = 3\xi^2 d\xi & v = \dfrac{\cosh\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix} \\
&\quad = -\left.\frac{\xi^3\cosh\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T + \int_0^T \frac{3\xi^2\cosh\lambda\xi}{\lambda}d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi^2, & dv = \cosh\lambda\xi d\xi \\ du = 2\xi d\xi & v = \dfrac{\sinh\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= -\left.\frac{\xi^3\cosh\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T + \left.\frac{3\xi^2\sinh\lambda\xi}{\lambda^2}\right|_0^T - \frac{3}{\lambda}\int_0^T \frac{2\xi\sinh\lambda\xi}{\lambda}d\xi = -\left.\frac{\xi^3\cosh\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T$$

$$+\left.\frac{3\xi^2\sinh\lambda\xi}{\lambda^2}\right|_0^T - \left.\frac{6\xi\cosh\lambda\xi}{\lambda^3}\right|_0^T + \left.\frac{6\sinh\lambda\xi}{\lambda^4}\right|_0^T$$

$$= -\frac{T^3\cosh\lambda T}{\lambda} + \frac{3T^2\sinh\lambda T}{\lambda^2} - \frac{6T\cosh\lambda T}{\lambda^3} + \frac{6\sinh\lambda T}{\lambda^4}, \tag{2.20}$$

$$\int_0^T \xi^3\sin(\lambda(-\xi))\,d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi^3, & dv = \sin\lambda\xi d\xi \\ du = 3\xi^2 d\xi & v = -\dfrac{\cos\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$= \left.\frac{\xi^3\cos\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T - \int_0^T \frac{3\xi^2\cos\lambda\xi}{\lambda}d\xi$$

$$= \left.\frac{\xi^3\cos\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T - \frac{3}{\lambda}\left.\left(\frac{\xi^2\sin\lambda\xi}{\lambda} + \frac{2\xi\cos\lambda\xi}{\lambda^2} - \frac{2\sin\lambda\xi}{\lambda^3}\right)\right|_0^T$$

$$= \frac{T^3\cos\lambda T}{\lambda} - \frac{3T^2\sin\lambda T}{\lambda^2} - \frac{6T\cos\lambda T}{\lambda^3} + \frac{6\sin\lambda T}{\lambda^4}, \tag{2.21}$$

$$\int_0^T \xi^3\cosh(\lambda(-\xi))\,d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi^3, & dv = \cosh\lambda\xi d\xi \\ du = 3\xi^2 d\xi & v = \dfrac{\sinh\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$= \left.\frac{\xi^3\sinh\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T - \int_0^T \frac{3\xi^2\sinh\lambda\xi}{\lambda}d\xi$$

$$= \left.\frac{\xi^3\sinh\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T + \frac{3}{\lambda}\left.\left(-\frac{\xi^2\cosh\lambda\xi}{\lambda} + \frac{2\xi\sinh\lambda\xi}{\lambda^2} - \frac{2\cosh\lambda\xi}{\lambda^3}\right)\right|_0^T$$

$$= \frac{T^3\sinh\lambda T}{\lambda} - \frac{3T^2\cosh\lambda T}{\lambda^2} + \frac{6T\sinh\lambda T}{\lambda^3} - \frac{6\cosh\lambda T}{\lambda^4} + \frac{6}{\lambda^4}, \tag{2.22}$$

$$\int_0^T \xi^3\cos(\lambda(-\xi))\,d\xi = \begin{bmatrix} u = \xi^3, & dv = \cos\lambda\xi d\xi \\ du = 3\xi^2 d\xi & v = \dfrac{\sin\lambda\xi}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$= \left.\frac{\xi^3\sin\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T - \int_0^T \frac{3\xi^2\sin\lambda\xi}{\lambda}d\xi$$

$$= \left.\frac{\xi^3\sin\lambda\xi}{\lambda}\right|_0^T + \frac{3}{\lambda}\left.\left(\frac{\xi^2\cos\lambda\xi}{\lambda} - \frac{2\xi\sin\lambda\xi}{\lambda^2} - \frac{2\cos\lambda\xi}{\lambda^3}\right)\right|_0^T$$

$$= \frac{T^3\sin\lambda T}{\lambda} + \frac{3T^2\cos\lambda T}{\lambda^2} - \frac{6T\sin\lambda T}{\lambda^3} - \frac{6\cos\lambda T}{\lambda^4} + \frac{6}{\lambda^4}. \tag{2.23}$$

Перейдемо до підрахування основних інтегралів:

$$
\begin{aligned}
W_4(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda^3} s_4(\lambda(-\xi)) f(\lambda,\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi^3 (\sinh(\lambda(-\xi)) - \sin(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \xi^3 (\sinh(\lambda(-\xi)) - \sin(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \xi^3 \sinh(\lambda(-\xi))\,d\xi - \int_0^T \xi^3 \sin(\lambda(-\xi))\,d\xi \right) \\
&= \frac{i}{2\lambda^4}\sqrt{\frac{2}{\pi}} (-T^3\lambda^3 \cosh \lambda T + 3T^2\lambda^2 \sinh \lambda T - 6T\lambda \cosh \lambda T \\
&+ 6 \sinh \lambda T - T^3\lambda^3 \cos \lambda T + 3T^2\lambda^2 \sin \lambda T + 6T\lambda \cos \lambda T - 6 \sin \lambda T), \\
W_3(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda^2} s_3(\lambda(-\xi)) f(\lambda,\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi^3 (\cosh(\lambda(-\xi)) - \cos(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= \frac{i\lambda}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \xi^3 \cosh(\lambda(-\xi))\,d\xi - \int_0^T \xi^3 \cos(\lambda(-\xi))\,d\xi \right) \\
&= \frac{i}{2\lambda^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} (T^3\lambda^3 \sinh \lambda T - 3T^2\lambda^2 \cosh \lambda T + 6T\lambda \sinh \lambda T \\
&- 6 \cosh \lambda T - T^3\lambda^3 \sin \lambda T - 3T^2\lambda^2 \cos \lambda T + 6T\lambda \sin \lambda T + 6 \cos \lambda T), \\
W_2(\lambda) &= \int_0^T \frac{1}{\lambda} s_2(\lambda(-\xi)) f(\lambda,\xi)\,d\xi \\
&= \int_0^T \frac{i\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi^3 (\sinh(\lambda(-\xi)) + \sin(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= \frac{i\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^T \xi^3 \sinh(\lambda(-\xi))\,d\xi + \int_0^T \xi^3 \sin(\lambda(-\xi))\,d\xi \right) \\
&= \frac{i}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} (-T^3\lambda^3 \cosh \lambda T + 3T^2\lambda^2 \sinh \lambda T - 6T\lambda \cosh \lambda T \\
&+ 6 \sinh \lambda T + T^3\lambda^3 \cos \lambda T - 3T^2\lambda^2 \sin \lambda T - 6T\lambda \cos \lambda T + 6 \sin \lambda T, \\
W_1(\lambda) &= \int_0^T s_1(\lambda(-\xi)) f(\lambda,\xi)\,d\xi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \frac{i\lambda^3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\xi^3(\cosh(\lambda(-\xi)) + \cos(\lambda(-\xi)))\,d\xi \\
&= \frac{i\lambda^3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_0^T \xi^3\cosh(\lambda(-\xi))\,d\xi + \int_0^T \xi^3\cos(\lambda(-\xi))\,d\xi\right) \\
&= \frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(T^3\lambda^3\sinh\lambda T - 3T^2\lambda^2\cosh\lambda T + 6T\lambda\sinh\lambda T - 6\cosh\lambda T \\
&+ T^3\lambda^3\sin\lambda T + 3T^2\lambda^2\cos\lambda T - 6T\lambda\sin\lambda T - 6\cos\lambda T + 12).
\end{aligned}
$$

Отже, при $u_0 = \xi^2$, $u_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
W_4(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda^4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-T^3\lambda^3\cosh\lambda T + 3T^2\lambda^2\sinh\lambda T - 6T\lambda\cosh\lambda T \\
&+ 6\sinh\lambda T - T^3\lambda^3\cos\lambda T + 3T^2\lambda^2\sin\lambda T + 6T\lambda\cos\lambda T - 6\sin\lambda T), \\
W_3(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(T^3\lambda^3\sinh\lambda T - 3T^2\lambda^2\cosh\lambda T + 6T\lambda\sinh\lambda T - 6\cosh\lambda T \\
&- T^3\lambda^3\sin\lambda T - 3T^2\lambda^2\cos\lambda T + 6T\lambda\sin\lambda T + 6\cos\lambda T), \\
W_2(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-T^3\lambda^3\cosh\lambda T + 3T^2\lambda^2\sinh\lambda T - 6T\lambda\cosh\lambda T \\
&+ 6\sinh\lambda T + T^3\lambda^3\cos\lambda T - 3T^2\lambda^2\sin\lambda T - 6T\lambda\cos\lambda T + 6\sin\lambda T), \\
W_1(\lambda) &= \frac{i}{2\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(T^3\lambda^3\sinh\lambda T - 3T^2\lambda^2\cosh\lambda T + 6T\lambda\sinh\lambda T - 6\cosh\lambda T \\
&+ T^3\lambda^3\sin\lambda T + 3T^2\lambda^2\cos\lambda T - 6T\lambda\sin\lambda T - 6\cos\lambda T + 12).
\end{aligned}
$$

Висновки

Було отримано аналоги функцій sin та cos для диференціального рівняння IV порядку, досліджено їх властивості.

Окрім цього, було розглянуто крайову задачу з параметрами, зведено її до системи інтегральних рівнянь та одержано необхідні умови розв'язності цієї системи.

Також розглянуто низку прикладів, що ілюструють одержані результати.

Список використаних джерел

[1] Л.В. Фардигола. Курс звичайних диференціальних рівнянь. Навчальний посібник — Київ: Наукова думка, 2022. — 312 с.

[2] V.A. Zolotarev. Inverse spectral problem for a third-order differential operator with non-local potential. Journal of Differential Equations 303 (2021) 456–481